UNIVERSITATEA DE VEST DIN TIMIŞOARA

FACULTATEA DE MATEMATICĂ ŞI INFORMATICĂ

MODELUL 2 - Subiect la Matematică
Concurs de admitere la Facultatea de Matematică şi Informatică

Subiectul 1 *Pentru* $t \in \mathbb{R}$ *considerăm matricele*

$$A(t) = \begin{pmatrix} 1-\cos t & \sin t \\ \sin t & 1+\cos t \end{pmatrix}, \qquad B(t) = \begin{pmatrix} 1+\cos t & -\sin t \\ -\sin t & 1-\cos t \end{pmatrix}.$$

i) *Calculaţi* $A(t)B(t)$, $B(t)A(t)$ *şi determinaţi mulţimea* $M = \{t \in \mathbb{R} : A(t) \text{ este inversabilă }\}$;

ii) *Calculaţi* $\det\left(A(t)^3 + B(t)^3\right)$;

iii) *Arătaţi că există şi determinaţi* $r \in \mathbb{R}$ *astfel încât* $A(t)^{2021} = r^{2020}A(t)$ *şi* $B(t)^{2021} = r^{2020}B(t)$ *pentru orice* $t \in \mathbb{R}$.

Subiectul 2 *Pe* $\mathbb{Z}$ *definim legea de compoziţie* $x \circ y = xy - 3x - 3y + 12$, $x, y \in \mathbb{Z}$.

i) *Arătaţi că legea de compoziţie "$\circ$" este asociativă.*

ii) *Determinaţi elementele simetrizabile faţă de legea "$\circ$".*

iii) *Calculaţi* $(-2021) \circ (-2020) \circ (-2019) \circ \ldots \circ 2019 \circ 2020 \circ 2021$;

iv) *Determinaţi* $x \in \mathbb{Z}$ *pentru care* $\underbrace{x \circ x \circ x \ldots \circ x}_{2021\, ori} = x$.

Subiectul 3 *Fie* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = (x+1)e^{-x}$.

i) *Determinaţi intervalele de monotonie ale funcţie* f;

ii) *Arătaţi că* $f(x) \leq 1$, *pentru orice* $x \in \mathbb{R}$;

iii) *Arătaţi că* $\sqrt{3}e^{\sqrt{2}} < \sqrt{2}e^{\sqrt{3}}$.

Subiectul 4 *Se consideră funcţia* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = (2x^2 - x + 1)e^{2x}$.

i) *Să se determine* $a, b \in \mathbb{R}$ *astfel încât funcţia* $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $F(x) = (x^2 + ax + b)e^{2x}$ *să fie o primitivă a funcţie* f.

ii) *Determinaţi primitiva,* F, *a funcţie* f *cu proprietatea că* $F(0) = \frac{9}{4}$.

iii) *Arătaţi că orice primitivă a funcţie* f *este convexă.*

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii şi se notează cu note cuprinse între 1 şi 10.

Timp de lucru: 3 ore.